数理解析研究所講究録
365巻 1979年 80-88

Cohomology spheres と cohomology complex projective spaces の S^1 orbit spaces の cohomology

東大 理学部 桝田 幹也

§0 Introduction

一般に top. space X に compact Lie group G が作用しているとする。このとき、$X_G = EG \underset{G}{\times} X$ とすると $H^*(X_G;\mathbb{Z})$ は群作用の様子を比較的よく表しているが、十分とは言えない。ここでは、$H^*(X/G;\mathbb{Z})$ がどの程度作用の様子を表しているかを、$G=S^1$ で、$X \underset{\mathbb{Z}}{\sim} S^n$ 又は $X \underset{\mathbb{Z}}{\sim} \mathbb{C}P^n$ の場合について調べる。ただし $X \underset{\mathbb{Z}}{\sim} Y$ とは $H^*(X;\mathbb{Z}) \simeq H^*(Y;\mathbb{Z})$ (ring として同型) のこと。

以下、§1, §2, において、X は compact Hausdorff $\dim_{\mathbb{Z}} X < \infty$ (i.e. $\dim_{\mathbb{Z}} X = m \overset{def}{\Leftrightarrow} {}^\forall U \subset X$ open $H_c^s(U;\mathbb{Z})=0$ for ${}^\forall s > m$) で異なった isotropy type は有限個の non-trivial effective S^1-action をもつとする。

§1. Cohomology spheres as S^1-orbit spaces of cohomology

以下 $X \underset{\mathbb{Z}}{\sim} S^n$ とする。

素数 p に対して、次のような filtration を考える。

$$(*)\left\{\begin{array}{l} X \supsetneqq X^{\mathbb{Z}_{p^{r_1}}} \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq X^{\mathbb{Z}_{p^{r_k}}} \supsetneqq X^{S^1} \\ \text{ただし、} \\ X^{\mathbb{Z}_{p^{r_j+1}}} = \cdots\cdots = X^{\mathbb{Z}_{p^{r_{j+1}}}} \quad (0 \le j < k)\ (r_0 = 0 \text{とする}) \end{array}\right.$$

Smith の Th. より、

$X^{\mathbb{Z}_{p^{r_j}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\sim} S^{d_j}$ ただし $d_j \equiv n \pmod 2$

$X^{S^1} \underset{\mathbb{Z}}{\sim} S^{n'}$ ただし $n' \equiv n \pmod 2$

注、$X^{S^1} = \phi$ のときは、$n' = -1$ と考える。

Theorem 1 (Conner-Floyd)

$$\tilde{H}^q(X/S^1 ; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n'+3,\ n'+5,\ \cdots,\ n-1 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

(証明略)

すなわち、additive には、$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ は、X^{S^1} によって決定される。しかし、一般に、$X^{S^1} = \phi$ のときは、orbit structure の様子を少し反映して、ring structure は異なる。

Theorem 2

- $X^{S^1} \neq \phi$ のとき、cup product は trivial
- $X^{S^1} = \phi$ のとき (故に $n' = -1$, d_j, n は奇数)

$X^{\mathbb{Z}_p} \neq \phi$ なる素数 p に対して、(*) の filtration を考え、

$$m_p(q) = \begin{cases} r_k & 0 \leq 2q \leq d_k \\ r_j & d_{j+1} \leq 2q \leq d_j \quad (1 \leq j < k) \\ 0 & d_1 < 2q \end{cases}$$

と定義する。 このとき

$\gamma_q \in H^{2q}(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ を generator とすると、

$$\gamma_1 \cup \gamma_q = \left(\prod_p p^{m_p(0) - m_p(q)}\right) \gamma_{q+1} \quad となる。$$

注. $X = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ において、

$z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ の作用を、

$z \cdot (z_1, \cdots, z_n) = (z^{a_1} z_1, \cdots, z^{a_n} z_n)$ (a_j $(1 \leq j \leq n)$ は positive integer) と定義した場合は、Kawasaki [3] によって計算されている。

<Th.2の証明の outline>

- $X^{S^1} \neq \phi$ の場合　省略
- $X^{S^1} = \phi$ の場合.　$X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X/S^1$ とする。

　$X^{S^1} = \phi$ より　$H^s(X/S^1 ; \mathbb{Q}) \underset{\pi^*}{\cong} H^s(X_{S^1} ; \mathbb{Q})$

　Th.1 より　$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ は torsion free だから、

$$H^s(X/S^1 ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^s(X_{S^1} ; \mathbb{Z}) \text{ injection}$$

一方、$s < n$ に対しては、$X_{S^1} \xrightarrow{\rho} BS^1$ の Serre spectral seq. より、$H^s(BS^1 ; \mathbb{Z}) \underset{\rho^*}{\cong} H^s(X_{S^1} ; \mathbb{Z})$ $(s < n)$

したがって、degree $< n$ においては、$H^*(X_{S^1} ; \mathbb{Z})$ の cup product は、よくわかっているから、p:素数に対して、

$$\pi^* : H^{2q}(X/S^1;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2q}(X_{S^1};\mathbb{Z}) \qquad (2q<n)$$

$$\gamma_q \longmapsto u_q\, p^{l_p(q)} \alpha^q \quad \text{ただし } (u_q, p)=1$$

$$\alpha \in H^2(X_{S^1};\mathbb{Z}) \text{ generator}$$

としたとき、$l_p(q)$ を求めればよい。

・$X^{\mathbb{Z}_p}=\phi$ なる素数 p の場合. $X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X/S^1$ の $\mathbb{Z}_p$ 係数の Leray spectral seq. より $\pi^* : H^*(X/S^1;\mathbb{Z}_p) \cong H^*(X_{S^1};\mathbb{Z}_p)$ $\therefore l_p(q)=0$ for $\forall q$

・$X^{\mathbb{Z}_p}\neq\phi$ なる素数 p の場合. Λ_p を、$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}-(p)$ による商環とする。ただし、$(p)\subset\mathbb{Z}$ は、p により生成された ideal.

$\pi : X_{S^1} \longrightarrow X/S^1$ の Λ_p 係数の Leray spectral seq を考える。

Lemma 3. $\pi : X_{S^1} \longrightarrow X/S^1$ の Λ_p 係数の Leray spectral seq. において、

$$E_2^{s,t} = \begin{cases} t=0 \text{ のとき.} & H^s(X/S^1 ; \Lambda_p) \\ t:\text{even}>0 \text{ のとき.} & \begin{cases} \mathbb{Z}_p^{m_p(q)} & \text{if } s=2q \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{cases}$$

Theorem 2 より、$H^s(X/S^1;\Lambda_p)=0$ if s=odd だから、このspectral seq. は、collapse している。故に $E_2^{s,t}=E_\infty^{s,t}$ for $\forall s,t$. (証明略)

ところで、

$$\left\{\begin{array}{l} H^{2q}(X_{S^1};\Lambda_p) = \mathcal{F}^{0,2q} \supset \mathcal{F}^{1,2q-1} \supset \cdots\cdots \supset \mathcal{F}^{2q,0} \supset 0 \\ \qquad \pi^* : H^{2q}(X/S^1;\Lambda_p) \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{F}^{2q,0} \subset H^{2q}(X_{S^1};\Lambda_p) \\ \mathcal{F}^{s,t}/\mathcal{F}^{s+1,t-1} \simeq E_\infty^{s,t} \qquad (s+t=2q) \end{array}\right.$$

であるから．Lemma 3 より，$l_p(q)=\sum_{j=0}^{q-1} m_p(j)$．したがって，$\gamma_h \cup \gamma_q = v p^x \gamma_{q+h}$　$(v, p)=1$ とおくと，両辺に π^* を施して，p の指数を比べることによって，$x=l_p(h)+l_p(q)-l_p(q+h)$ が得られる。とくに，$h=1$ のときは，$x=m_p(0)-m_p(q)$．これを，すべての素数 p について，行うことによって求める結果が，得られる。　　　q. e. d.

注1．X：smooth manifold で，smooth な non-trivial S^1 作用があるとする。$X \cong S^n$ のとき，$\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に対して，$H^*(X/\mathbb{Z}_m ; \mathbb{Z})$ を，Conner-Floyd の方法と，ほぼ同様の方法で求めることができる。一方，$X^{S^1}=\phi$ のとき，isotropy group をすべて含むような $\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に対しては，$X/\mathbb{Z}_m \to X/S^1$ は，S^1-bundle になる。したがって，これの Gysin exact seq. を書くことにより，$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ の cup product を求めることができる。

注2．X：smooth manifold で，smooth な non-trivial S^1 作用があるとする。$X \cong S^n$ のとき，$\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に対して，$p: X/\mathbb{Z}_m \to X/S^1$ (proj.) とすると，$p^*: H^q(X/S^1 ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(X/\mathbb{Z}_m ; \mathbb{Z})$ onto for $q<n$ が示される。したがって，$H^*(X/\mathbb{Z}_m ; \mathbb{Z})$ の ring structure がわかる。特に，$X^{S^1} \neq \phi$ のときは，$H^*(X/\mathbb{Z}_m ; \mathbb{Z})$ の cup product は trivial．（cf. Kawasaki [3]）

§2. Cohomology complex projective spaces の S^1-orbit spaces の cohomology

以下 $X \underset{L}{\sim} \mathbb{C}P^n$ とする。(但し $L = \mathbb{Z}_p$ (p:素数), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

Bredon の Th. より、

$$F = X^{S^1} = \coprod_{i=1}^{l} F_i \text{ (disjoint union)} \quad F_i \underset{L}{\sim} \mathbb{C}P^{n_i} \quad (1 \leq i \leq l)$$

$$\sum_{i=1}^{l} (n_i + 1) = n + 1.$$

Theorem. 5.

$$\tilde{H}^s(X/S^1 ; L) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-1} l_j - \min(n+1, q+1)\right) L & \text{if } s = 2q+1, (q \geq 1) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

但し、$l_j = \# \{ i \mid n_i \geq j \}$

すなわち、$H^*(X/S^1 ; L)$ は、X^{S^1}によってのみ、決定される。

<証明の outline>

まず、$L = \mathbb{Q}$ のとき証明する。 $X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X/S^1$ の $\mathbb{Q}$ 係数の Leray spectral seq. を考える。

$$E_2^{s,t} = \begin{cases} t = 0 \text{ のとき} & H^s(X/S^1 ; \mathbb{Q}) \\ t : \text{even} > 0 \text{ のとき} & H^s(F : \mathbb{Q}) \\ \text{その他} & 0 \end{cases}$$

$\therefore \quad H^{2q}(X/S^1 : \mathbb{Q}) = E_2^{2q,0} = E_\infty^{2q,0}$. 以下これが 0 を示す。

Prop. 6. $F_{S^1} \xrightarrow{i} X_{S^1}$ (inclusion) とすると、

$i^* : H^*(X_{S^1} ; L) \longrightarrow H^*(F_{S^1} ; L) = H^*(F : L) \otimes H^*(BS^1 ; L)$. 今、

$x \in H^{2q}(X_{S^1} ; L)$ $(q \neq 0)$ に対して、$i^* x \in H^{2q}(F : L) \otimes H^0(BS^1 ; L)$

ならば、$x = 0$. (証明略)

$$
\begin{array}{ccc}
F_{S^1} & \xrightarrow{\iota} & X_{S^1} \\
\pi' \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \pi \\
F & \longrightarrow & X/S^1
\end{array}
$$

π, π' の $\mathbb{Q}$係数 Leray spectral seq. において、それぞれの filtration は.

$$
\begin{array}{ccc}
H^{2q}(X_{S^1}:\mathbb{Q}) = \mathcal{F}^{0,2q} \supset \mathcal{F}^{1,2q-1} \supset \cdots\cdots \supset \mathcal{F}^{2q,0} = E_\infty^{2q,0} \supset 0. \\
\iota^* \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \\
H^{2q}(F_{S^1}:\mathbb{Q}) = {}'\mathcal{F}^{0,2q} \supset {}'\mathcal{F}^{1,2q-1} \supset \cdots\cdots \supset {}'\mathcal{F}^{2q,0} = H^{2q}(F:\mathbb{Q}) \otimes H^0(BS^1:\mathbb{Q})
\end{array}
$$

したがって、Prop 6 より、$E_\infty^{2q,0} = 0$ $\therefore H^{2q}(X/S^1:\mathbb{Q}) = 0$.

一方

$$
\begin{array}{lcl}
 & & E_2^{2q+1,0} \quad (q \neq 0) \\
 & & \parallel \\
l_{q-1}\mathbb{Q} = E_2^{2q-2,2} = E_3^{2q-2,2} & \xrightarrow{d_3} & E_3^{2q+1,0} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \cup & & \\
\qquad\qquad\quad E_4^{2q-2,2} = E_\infty^{2q-2,2} & & \downarrow \\
 & & E_4^{2q+1,0} \\
 & & \parallel \\
l_{q-2}\mathbb{Q} = E_2^{2q-4,4} = \cdots\cdots = E_5^{2q-4,4} & \xrightarrow{d_5} & E_5^{2q+1,0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup & & \\
\qquad\qquad\qquad\quad E_6^{2q-4,4} = E_\infty^{2q-4,4} & & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
l_0\mathbb{Q} = E_2^{0,2q} = \cdots\cdots = E_{2q+1}^{0,2q} & \xrightarrow{d_{2q+1}} & E_{2q+1}^{2q+1,0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup & & \\
\qquad\qquad\qquad\quad E_{2q+2}^{0,2q} = E_\infty^{0,2q} & & \downarrow \\
 & & E_{2q+2}^{2q+1,0} = E_\infty^{2q+1,0} = 0.
\end{array}
$$

$E_\infty^{2q,0} = 0$ と $H^{2q}(X_{S^1}:\mathbb{Q}) = \min(q+1, n+1)\,\mathbb{Q}$ より.

$\dim_{\mathbb{Q}}(E_\infty^{2q-2,2} + E_\infty^{2q-4,4} + \cdots + E_\infty^{0,2q}) = \min(q+1, n+1)$ よって.

上の図より. $\dim_{\mathbb{Q}} E_2^{2q+1,0} = \sum_{j=0}^{q-1} l_j - \min(q+1, n+1)$ したがって. $L = \mathbb{Q}$ のときは証明された.

$L=\mathbb{Z}_p$のとき．

$X \underset{\mathbb{Z}_p}{\sim} \mathbb{C}P^n \Rightarrow X \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \mathbb{C}P^n$ だから，$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ の free part の個数は，得られている。したがって，あと，$\tilde{H}^{ev}(X/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$ を示せばよい。このため，次のような filtration を考える。

$X=X_0 \supsetneqq X_1 \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq X_k$ 但し，X_{j+1} は，X_j の S^1 action を effective にしたとき，$X_j^{\mathbb{Z}_p}$ の component のうち，F の component であるもの を，除いたもの．X_k は，S^1 action を effective にしたとき，$X_k^{\mathbb{Z}_p}$ の component は，F の component ばかりからなるとする。今，X_k の S^1 action を effective にしておく。$X_k^{\mathbb{Z}_p}=X_k^{S^1}$ だから，$(X_k)_{S^1} \longrightarrow X_k/S^1$ の $\mathbb{Z}_p$ 係数 Leray spectral seq. は，$\mathbb{Q}$ 係数の場合と同じで，同様の議論が成立つ，特に $\tilde{H}^{ev}(X_k/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$

Lemma 7. $H^{ev}(X_j/S^1, X_{j+1}/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0 \quad (0 \leq j < k)$

証明には，X_j の S^1 action を effective にとっておいて，$(X_j - X_{j+1})_{S^1} \longrightarrow X_j - X_{j+1}/S^1$ の compact support の $\mathbb{Z}_p$-Leray spectral seq と Prop 6．を用いる。

Lemma 7 より，triple の exact seq. を使って，$\tilde{H}^{ev}(X/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$ が示される。 q.e.d.

参考文献

[1] A. Borel et. al. 'Seminar on Transformation Groups' Ann. of Math. Studies No. 46. Princeton (1960)

[2] W.Y. Hsiang 'Cohomology Theory of Topological Transformation Groups' Springer (1975)

[3]. T. Kawasaki 'Cohomology of twisted projective spaces and lens complexes.' Math. Ann 206 243-248 (1973)